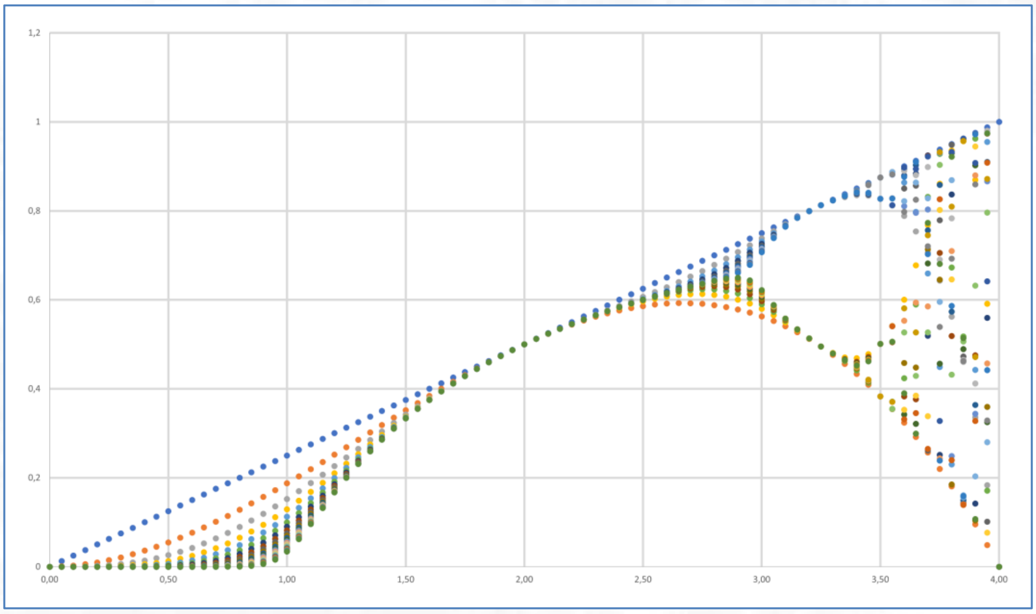
Sistemas Caóticos

Sergio CT



« Cuando una mariposa bate sus alas en una parte del mundo,
eventualmente puede causar un huracán en otra …»

Edward Norton Lorenz, Efecto Mariposa

https://fractalfun.es

Contenido

Introducción

¿Se puede predecir el futuro?

Desde las predicciones meteorológicas hasta los modelos de ecosistemas, la idea de que el destino esté escrito ha fascinado a filósofos y científicos. La filosofía del determinismo nos dice que todo está ligado por una cadena de causa y efecto, lo que implica, al menos en teoría, que el futuro podría predecirse como si de armar un puzle lógico se tratase. Pero ¿es realmente tan simple?

Imagina un planeta con una sola especie animal que se alimenta de una única especie vegetal. Sin depredadores ni otras interferencias externas parecería sencillo prever cómo evolucionará su población. Sin embargo, incluso en este ecosistema, aparentemente básico, se pueden producir comportamientos impredecibles.

En este documento veremos cómo una simple ecuación puede transformar nuestras certezas en incógnitas, desafiando nuestra capacidad para entender y anticipar comportamientos aparentemente previsibles.

Ecuación logística

Supongamos que en nuestro planeta ficticio la población de animales inicial $\mathbf{X_n}$ es de 30 individuos, y que tras dejarlo evolucionar durante un año la población actual $\mathbf{X_{n+1}}$ es de 36. Con estos datos podemos calcular el índice de crecimiento **q** de la siguiente forma:

$$q = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} \cdot 100 = \frac{36 - 30}{30} \cdot 100 = 20\%$$

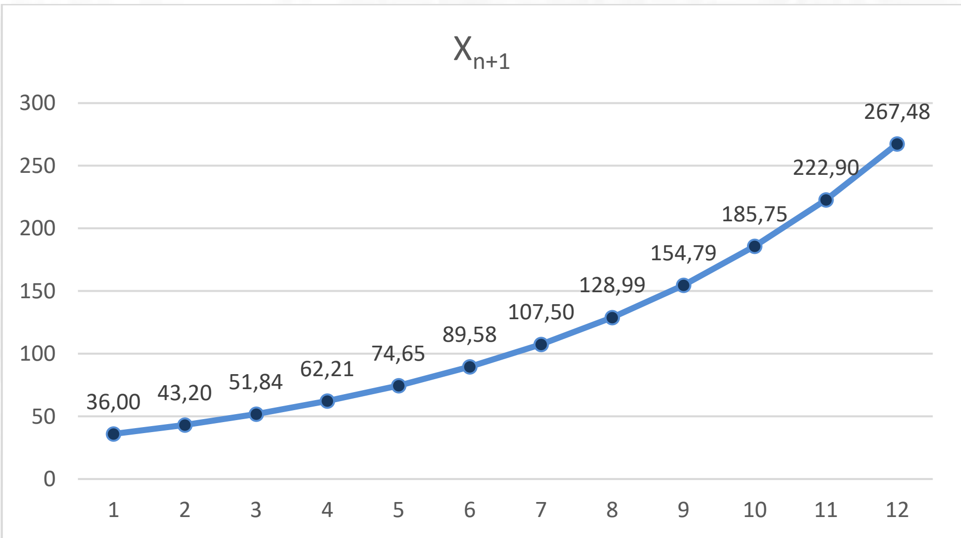
Considerando que el crecimiento permanece constate, podemos calcular como progresa la población a medida que pasan los años. Para ello vamos a aplicar este índice sucesivamente a la población anterior, de la siguiente forma:

$$q = 1 + \frac{20}{100} = 1{,}2$$

$$x_{n+1} = q \cdot x_n$$

- $x_1 = 1{,}2 \cdot 30 = 36$
- $x_2 = 1{,}2 \cdot 36 = 43{,}2$
- $x_3 = 1{,}2 \cdot 43{,}2 = 51{,}84$
- …

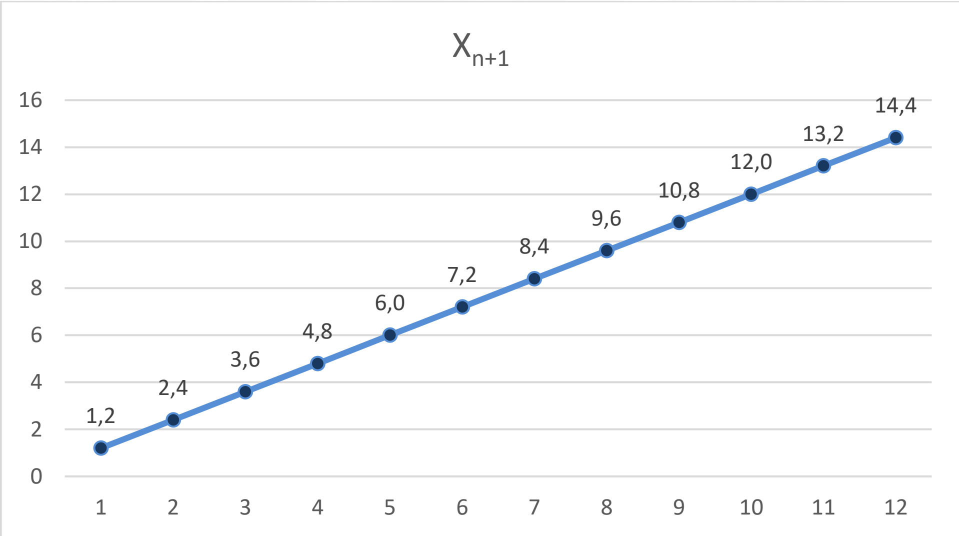
Con estos datos podemos representar la evolución de la población en un gráfico:



Crecimiento de la población acumulado con los años (representados en el eje horizontal).
La población inicial es de 30 individuos y el índice de crecimiento es del 20%.

Como podemos observar, la población aumenta de forma imparable a medida que transcurren los años. De modo que nuestro modelo de ecosistema, por ahora, no es del todo realista, ya que llegaría un momento en el que la comida empezaría a escasear y la población se vería afectada.

Esta situación se produce porque la función que estamos utilizado tiene un comportamiento lineal, como podemos ver en el siguiente gráfico:



Población que se obtiene al aplicar un índice de crecimiento del 20% a diferentes valores de población inicial (representados en el eje horizontal).

A partir de este punto trabajaremos con valores más manejables, utilizando fracciones entre cero y uno. El valor 1 representará el mayor número posible de individuos, mientras que el valor 0 representará la extinción de la especie.

Para incorporar el problema de escasez de alimento a la función debemos crear un nuevo índice que limite las posibilidades que los animales tienen de alimentarse.

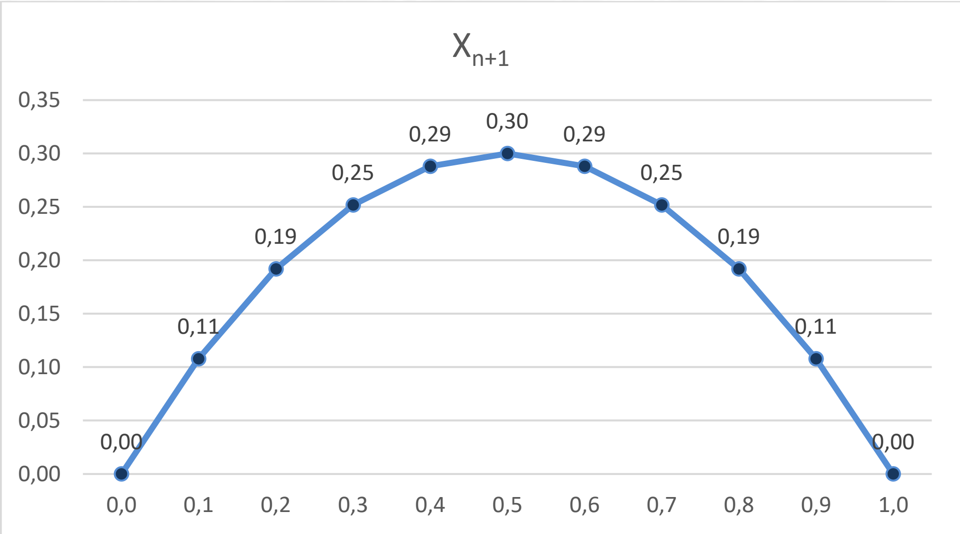
Teniendo en cuenta que la población animal puede llegar a un número máximo en el que acaben con todos los recursos vegetales, podemos deducir que la cantidad de vegetales disponibles es inversamente proporcional al número de animales que se alimentan de ellos.

Una forma de representar este equilibrio podría ser **Y = 1 – X**, donde **Y** es la cantidad de vegetales y **X** es la cantidad de animales. Si el número de animales aumenta hasta su nivel máximo, **X = 1**, se comerán todos los vegetales, **Y = 1 – 1 = 0**. En cambio, si el número de animales disminuye hasta su extinción, **X = 0**, los vegetales aumentarán hasta alcanzar su nivel máximo, **Y = 1 – 0 = 1**.

Ahora podemos incluir esta expresión en la función, usándola como índice de supervivencia.

$$x_{n+1} = q \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$$

Como podemos ver en el siguiente gráfico, con este cambio hemos conseguido que la función tenga un comportamiento no lineal.



Población que se obtiene al aplicar un índice de crecimiento del 20% a diferentes valores de población inicial (representados en el eje horizontal), teniendo en cuenta el índice de supervivencia.

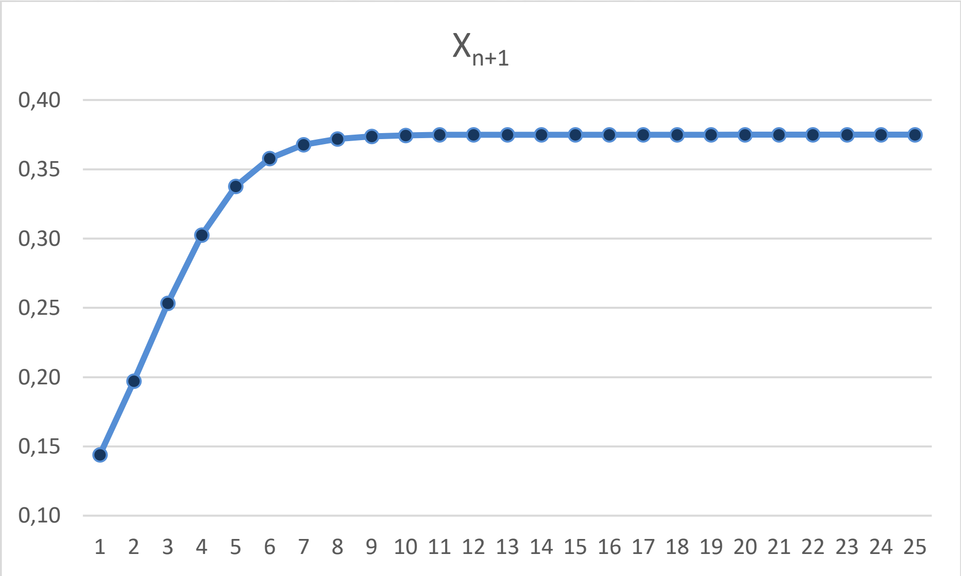
Bajo estas condiciones, podemos ver que comenzando con una población inicial de **0,1** la población nunca alcanzará un valor de **0,2**. Esto se debe a que la función incorpora limitaciones de recursos que regulan el crecimiento a medida que la población aumenta. Para este caso específico, la población se estabiliza aproximadamente en **0,167** después de unos 30 años de evolución.

Visto de otro modo, la gráfica muestra que si comenzamos con una población inicial de **0,5** la cantidad de alimento disponible solo permite la supervivencia del 30% de los individuos al cabo de un año. Esto significa que la población disminuye rápidamente debido a la escasez de alimento y tiende al mismo punto de equilibrio de aproximadamente **0,167**.

Ahora, con esta adaptación, la función tiene un comportamiento más realista, así que vamos a ponerla a prueba en diferentes escenarios.

Vamos a calcular el progreso de una población año tras año fijando el valor inicial de la población en **0,1** y el índice de crecimiento en el **60%** (q = 1,6).

Año	X_n	X_{n+1}
1	0,10000000	0,14400000
2	0,14400000	0,19722240
3	0,19722240	0,25332116
4	0,25332116	0,30263928
5	0,30263928	0,33767799
6	0,33767799	0,35784251
7	0,35784251	0,36766600
8	0,36766600	0,37198034
9	0,37198034	0,37377755
10	0,37377755	0,37450863
11	0,37450863	0,37480306
12	0,37480306	0,37492116
13	0,37492116	0,37496846
14	0,37496846	0,37498738
15	0,37498738	0,37499495
16	0,37499495	0,37499798
17	0,37499798	0,37499919
18	0,37499919	0,37499968
19	0,37499968	0,37499987
20	0,37499987	0,37499995
21	0,37499995	0,37499998
22	0,37499998	0,37499999
23	0,37499999	**0,37500000**
24	0,37500000	**0,37500000**
25	0,37500000	**0,37500000**



Como vemos, una vez transcurridos 23 años la población final alcanza un valor estable de **0,375**.

Ahora vamos a ver qué ocurre con diferentes valores de población inicial manteniendo el índice de crecimiento en el **60%** (q = 1,6). Por ejemplo, **0,3** y **0,5**.

Año	X_n	X_{n+1}
1	0,30000000	0,33600000
2	0,33600000	0,35696640
3	0,35696640	0,36726622
4	0,36726622	0,37181079
5	0,37181079	0,37370804
6	0,37370804	0,37448055
7	0,37448055	0,37479179
8	0,37479179	0,37491665
9	0,37491665	0,37496665
10	0,37496665	0,37498666
11	0,37498666	0,37499466
12	0,37499466	0,37499786
13	0,37499786	0,37499915
14	0,37499915	0,37499966
15	0,37499966	0,37499986
16	0,37499986	0,37499995
17	0,37499995	0,37499998
18	0,37499998	0,37499999
19	0,37499999	**0,37500000**
20	0,37500000	**0,37500000**
21	0,37500000	**0,37500000**
22	0,37500000	**0,37500000**
23	0,37500000	**0,37500000**
24	0,37500000	**0,37500000**
25	0,37500000	**0,37500000**

Año	X_n	X_{n+1}
1	0,50000000	0,40000000
2	0,40000000	0,38400000
3	0,38400000	0,37847040
4	0,37847040	0,37636889
5	0,37636889	0,37554456
6	0,37554456	0,37521735
7	0,37521735	0,37508686
8	0,37508686	0,37503473
9	0,37503473	0,37501389
10	0,37501389	0,37500556
11	0,37500556	0,37500222
12	0,37500222	0,37500089
13	0,37500089	0,37500036
14	0,37500036	0,37500014
15	0,37500014	0,37500006
16	0,37500006	0,37500002
17	0,37500002	0,37500001
18	0,37500001	**0,37500000**
19	0,37500000	**0,37500000**
20	0,37500000	**0,37500000**
21	0,37500000	**0,37500000**
22	0,37500000	**0,37500000**
23	0,37500000	**0,37500000**
24	0,37500000	**0,37500000**
25	0,37500000	**0,37500000**

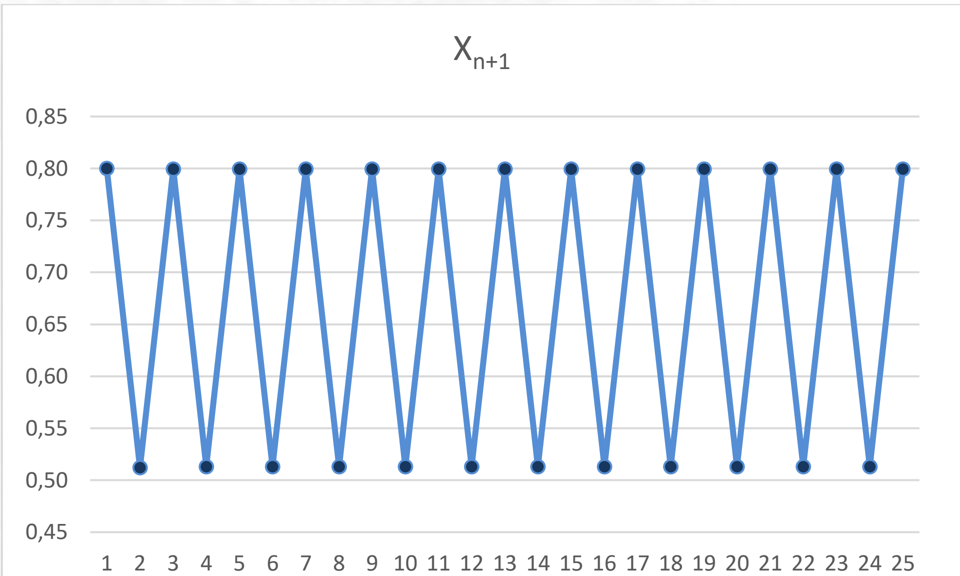
En ambos casos la población se estabiliza en el mismo valor: **0,375**.

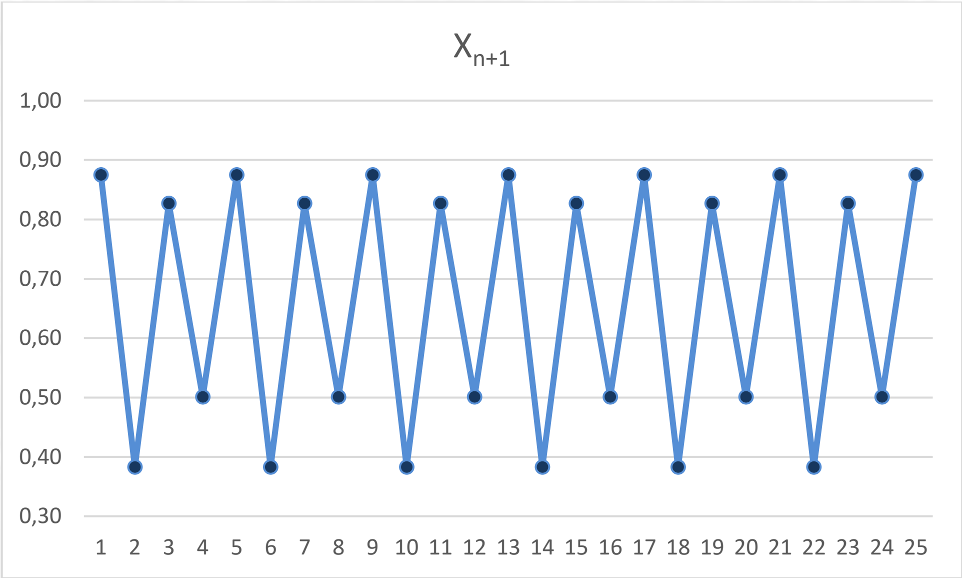
Para una población inicial de **0,3** se estabiliza al cabo de 19 años y para una población inicial de **0,5** ocurre lo mismo al cabo de 18 años. Esto nos lleva a la conclusión de que, una vez fijado el índice de crecimiento en el **60%**, la población tiene un futuro predecible, independientemente del número de individuos que la compongan inicialmente.

Pero esta función esconde mucho más. Veamos qué ocurre si la población se multiplica a pasos agigantados, con un índice de crecimiento del **220%** (q = 3,2) y otro del **250%** (q = 3,5).

Año	X_n	X_{n+1}
1	0,50000000	0,80000000
2	0,80000000	0,51200000
3	0,51200000	0,79953920
4	0,79953920	0,51288406
5	0,51288406	0,79946880
6	0,79946880	0,51301899
7	0,51301899	0,79945762
8	0,79945762	0,51304043
9	0,51304043	0,79945583
10	0,79945583	0,51304386
11	0,51304386	0,79945554
12	0,79945554	0,51304441
13	0,51304441	0,79945550
14	0,79945550	0,51304449
15	0,51304449	**0,79945549**
16	0,79945549	**0,51304451**
17	0,51304451	**0,79945549**
18	0,79945549	**0,51304451**
19	0,51304451	**0,79945549**
20	0,79945549	**0,51304451**
21	0,51304451	**0,79945549**
22	0,79945549	**0,51304451**
23	0,51304451	**0,79945549**
24	0,79945549	**0,51304451**
25	0,51304451	**0,79945549**

Año	X_n	X_{n+1}
1	0,50000000	0,87500000
2	0,87500000	0,38281250
3	0,38281250	0,82693481
4	0,82693481	0,50089769
5	0,50089769	0,87499718
6	0,87499718	0,38281990
7	0,38281990	0,82694089
8	0,82694089	0,50088380
9	0,50088380	0,87499727
10	0,87499727	0,38281968
11	0,38281968	0,82694070
12	0,82694070	0,50088422
13	0,50088422	**0,87499726**
14	0,87499726	**0,38281968**
15	0,38281968	**0,82694071**
16	0,82694071	**0,50088421**
17	0,50088421	**0,87499726**
18	0,87499726	**0,38281968**
19	0,38281968	**0,82694071**
20	0,82694071	**0,50088421**
21	0,50088421	**0,87499726**
22	0,87499726	**0,38281968**
23	0,38281968	**0,82694071**
24	0,82694071	**0,50088421**
25	0,50088421	**0,87499726**





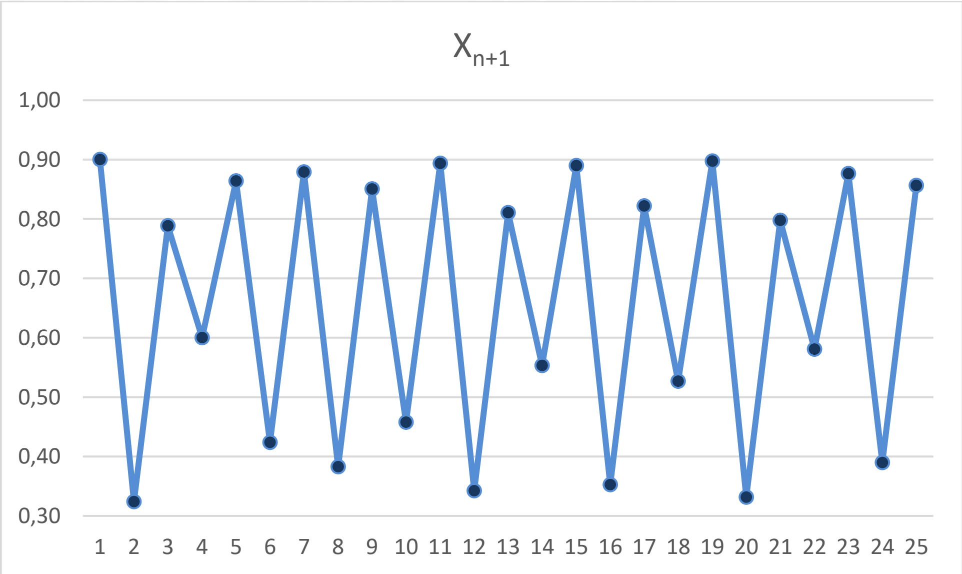
En ambos casos aparecen comportamientos periódicos.

Para un índice de crecimiento del **220%**, la población alterna entre dos valores finales que se repiten cada dos años, y para un índice del **250%**, alterna entre cuatro valores finales que se repiten cada cuatro años.

Si seguimos aumentando poco a poco el índice de crecimiento, veremos que aparecen periodos de ocho años, dieciséis años, etc. así hasta llegar a un punto muy especial en el que la función empieza a tener un comportamiento aparentemente impredecible.

Por ejemplo, con un índice de crecimiento del **260%** (q = 3,6) los valores finales de la población son diferentes cada año, sin mostrar ningún tipo de periodicidad.

Año	X_n	X_{n+1}
1	0,50000000	0,90000000
2	0,90000000	0,32400000
3	0,32400000	0,78848640
4	0,78848640	0,60039215
5	0,60039215	0,86371710
6	0,86371710	0,42375554
7	0,42375554	0,87907242
8	0,87907242	0,38269477
9	0,38269477	0,85046214
10	0,85046214	0,45783464
11	0,45783464	0,89359950
12	0,89359950	0,34228597
13	0,34228597	0,81045463
14	0,81045463	0,55302452
15	0,55302452	0,88987824
16	0,88987824	0,35278185
17	0,35278185	0,82197654
18	0,82197654	0,52679200
19	0,52679200	0,89741588
20	0,89741588	0,33141823
21	0,33141823	0,79768867
22	0,79768867	0,58097325
23	0,58097325	0,87639600
24	0,87639600	0,38997378
25	0,38997378	0,85641923



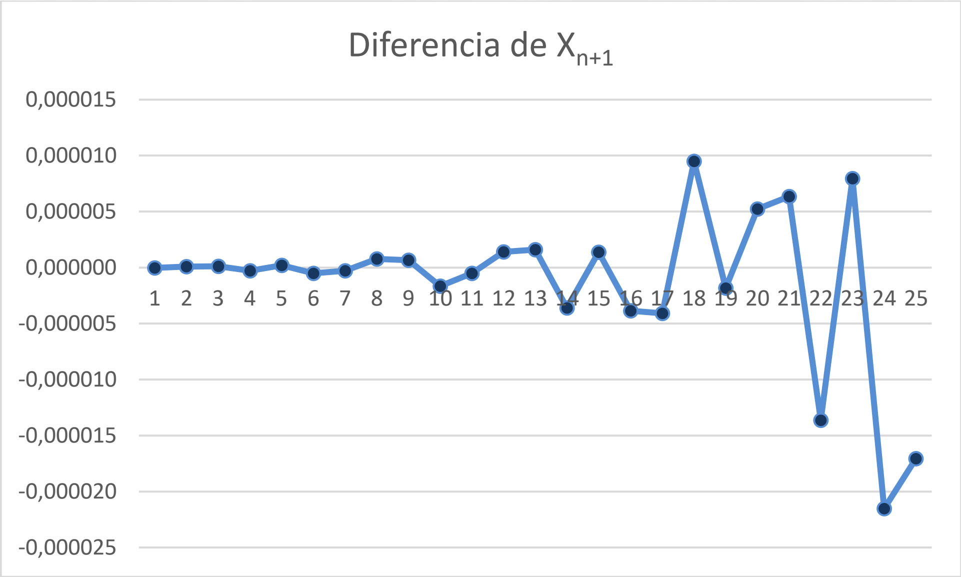
Como consecuencia de la no periodicidad introducida por este índice de crecimiento, la exactitud de la medición del valor inicial de la población es determinante para poder calcular con precisión el valor de la población final al cabo de un tiempo.

Veamos las diferencias en la población final, con respecto a los valores calculados en la tabla anterior para una población inicial de **0,5**, si la aumentamos tan sólo una diezmilésima: **0,5001**.

Año	X_n	X_{n+1}
1	0,50010000	0,89999996
2	0,89999996	0,32400010
3	0,32400010	0,78848653
4	0,78848653	0,60039188
5	0,60039188	0,86371730
6	0,86371730	0,42375502
7	0,42375502	0,87907213
8	0,87907213	0,38269555
9	0,38269555	0,85046279
10	0,85046279	0,45783299
11	0,45783299	0,89359899
12	0,89359899	0,34228739
13	0,34228739	0,81045624
14	0,81045624	0,55302092
15	0,55302092	0,88987962
16	0,88987962	0,35277799
17	0,35277799	0,82197244
18	0,82197244	0,52680148
19	0,52680148	0,89741405
20	0,89741405	0,33142346
21	0,33142346	0,79769502
22	0,79769502	0,58095962
23	0,58095962	0,87640394
24	0,87640394	0,38995226
25	0,38995226	0,85640218

Diferencia de X_{n+1}
-0,00000004
0,00000010
0,00000013
-0,00000027
0,00000020
-0,00000052
-0,00000028
0,00000077
0,00000065
-0,00000165
-0,00000050
0,00000142
0,00000161
-0,00000360
0,00000138
-0,00000386
-0,00000409
0,00000949
-0,00000183
0,00000524
0,00000636
-0,00001362
0,00000794
-0,00002152
-0,00001705

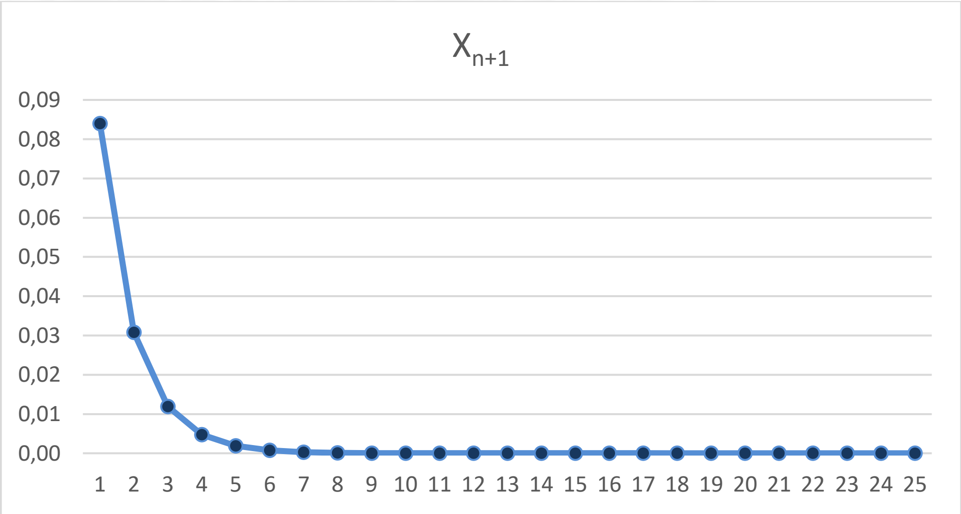
Puede parecer que las diferencias no son importantes, pero en el siguiente gráfico podemos ver como un pequeño cambio al principio produce enormes diferencias con el paso de los años.



Este comportamiento es característico de los **sistemas caóticos**, donde pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden generar diferencias drásticas en los resultados finales. Este fenómeno, conocido como sensibilidad a las condiciones iniciales, hace que la predicción a largo plazo sea prácticamente imposible, como por ejemplo en la predicción climática o en el problema de los tres cuerpos, ya que los errores iniciales se amplifican con el paso del tiempo, obligando a realizar actualizaciones constantes en los cálculos.

Para finalizar este análisis veamos un ejemplo de extinción de la especie. Para que se de esta situación el índice de crecimiento tiene que ser negativo de manera que se cumpla **q < 1**. Por ejemplo, si lo fijamos en **-60%** obtenemos **q = (1 – 60/100) = 0,4**.

Año	X_n	X_{n+1}
1	0,30000000	0,08400000
2	0,08400000	0,03077760
3	0,03077760	0,01193214
4	0,01193214	0,00471590
5	0,00471590	0,00187747
6	0,00187747	0,00074958
7	0,00074958	0,00029961
8	0,00029961	0,00011981
9	0,00011981	0,00004792
10	0,00004792	0,00001917
11	0,00001917	0,00000767
12	0,00000767	0,00000307
13	0,00000307	0,00000123
14	0,00000123	0,00000049
15	0,00000049	0,00000020
16	0,00000020	0,00000008
17	0,00000008	0,00000003
18	0,00000003	0,00000001
19	0,00000001	0,00000001
20	0,00000001	**0,00000000**
21	0,00000000	**0,00000000**
22	0,00000000	**0,00000000**
23	0,00000000	**0,00000000**
24	0,00000000	**0,00000000**
25	0,00000000	**0,00000000**

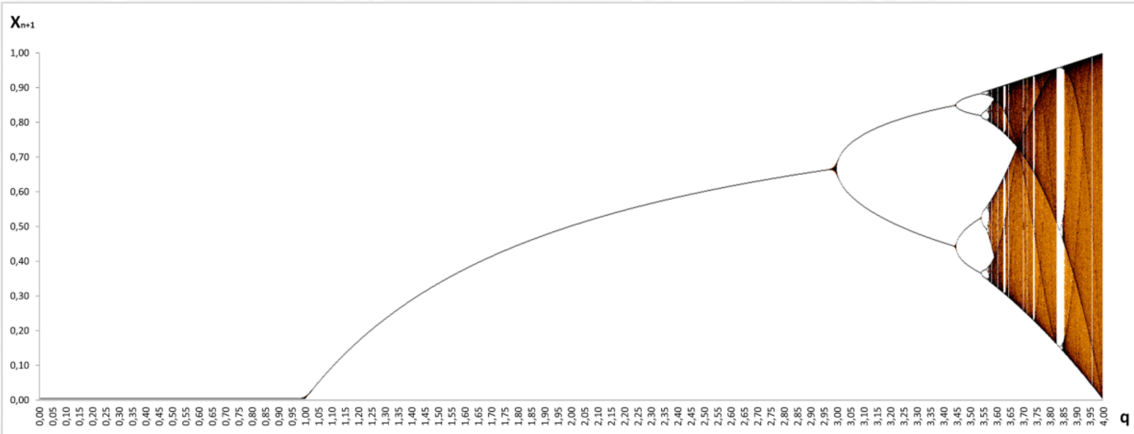


Una vez transcurridos 20 años la población se extingue por completo.

Caos y Fractales

¿Qué tienen que ver los fractales con todo esto?

Llegado a este punto podemos representar la periodicidad de la función en un gráfico que relacione el índice de crecimiento con sus posibles valores de población final. A este gráfico se le llama **Diagrama de Bifurcación**.

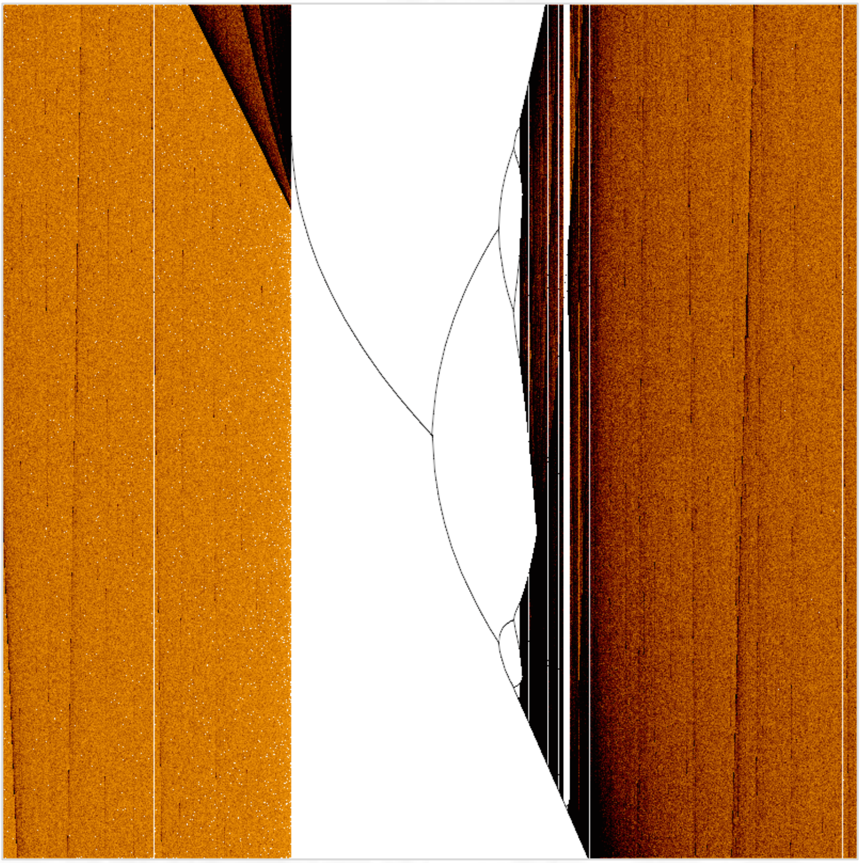


Población final $\mathbf{X_{n+1}}$ que se obtiene al aplicar diferentes
índices de crecimiento **q** a la población inicial.

Si analizamos el diagrama podemos ver lo siguiente:

- **Zona de extinción**: valores de **q** inferiores a 1, donde la población inevitablemente desaparece.
- **Zona estacionaria**: valores de **q** comprendidos entre 1 y 3, donde la población se estabiliza en un único valor.
- **Zonas periódicas**: valores de **q** comprendidos entre 3 y 3,56, donde la población oscila en ciclos regulares.
- **Zona de comportamiento caótico**: valores de **q** superiores a 3,56, donde los valores de población cambian de manera impredecible.
- **Interrupciones del comportamiento caótico**: valores de **q** superiores a 3,56, donde la población vuelve a oscilar momentáneamente en ciclos regulares.

Como se aprecia en el siguiente gráfico, las interrupciones del comportamiento caótico tienen claramente una **estructura fractal**, lo que nos revela la estrecha relación entre el orden y el caos. Las bifurcaciones acaban en bifurcaciones más pequeñas, y así sucesivamente; hasta desembocar en zonas caóticas que, a su vez, son el origen de nuevas bifurcaciones, creando un patrón auto semejante.



Detalle de una interrupción entre zonas caóticas, donde vuelve a darse un comportamiento periódico.

Conclusiones

El estudio de los sistemas caóticos trasciende el ámbito de la matemática y la física, encontrando aplicaciones fundamentales en áreas tan diversas como la meteorología, la medicina, la economía y la astrofísica. Su capacidad para modelar fenómenos impredecibles y revelar patrones subyacentes nos recuerda que el caos no es simplemente desorden, sino una ventana hacia la comprensión de la complejidad del universo.