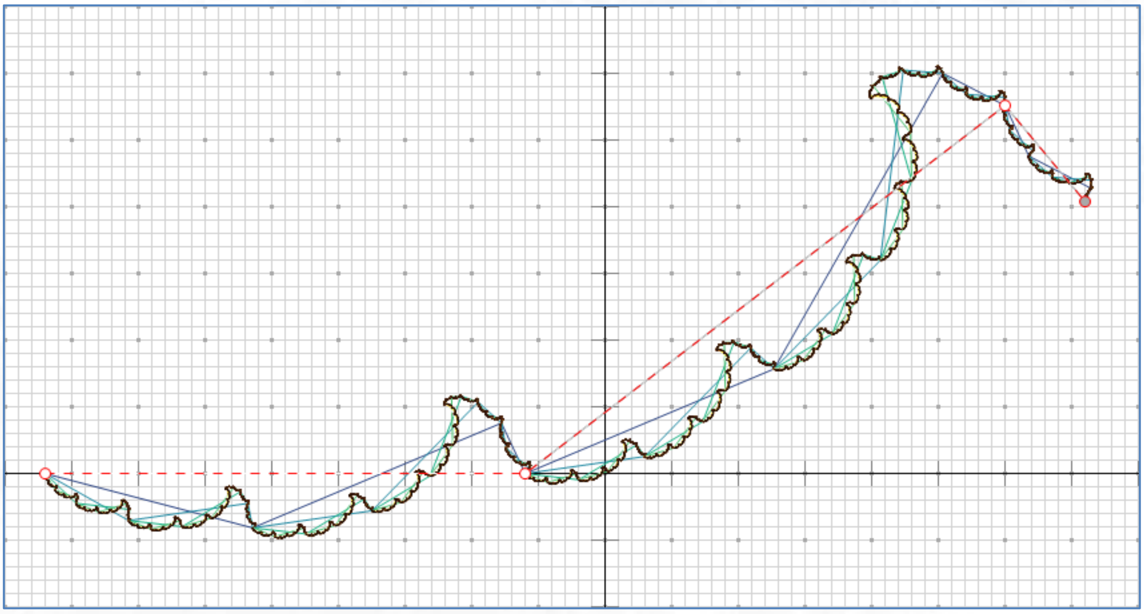
Dimensión Fractal

Sergio CT



1.18209897621861

« Nadie que no esté familiarizado con los fractales será considerado culto, científicamente, el día de mañana ...»

John Wheeler

https://fractalfun.es

Contenido

Introducción

Este documento describe como calcular la dimensión fractal mediante el método de **Conteo de Cajas de Minkowski-Bouligand**.

Estamos familiarizados con el concepto de **dimensión**, entendiéndolo como un número entero asociado a las propiedades métricas de los objetos en un espacio euclídeo. Por ejemplo, se podría definir como el número mínimo de coordenadas necesarias para localizar cualquier punto en dicho espacio.

En cambio, el concepto de **dimensión fractal** es completamente diferente. En este caso, hablamos de un número real que nos ofrece información acerca de la complejidad de un objeto, y de cómo esta cambia en función de la escala a la que se analice dicho objeto.

Por ejemplo, si tomamos una línea recta, tanto su dimensión fractal como su dimensión euclídea tendrán valor igual a 1. En cambio, si tomamos una línea irregular, su dimensión euclídea seguirá siendo 1, pero su dimensión fractal podría tener un valor de, por ejemplo, 1.78. Este valor nos estaría diciendo que su nivel de irregularidad le permite, en cierta medida, cubrir el plano. Es decir, nos indica “cuanto cerca se encuentra de una dimensión superior a la dimensión euclídea que lo caracteriza”, ya que $1d < 1.78 < 2d$.

Dimensión Euclídea

Para definir matemáticamente el concepto de dimensión podemos hacer la siguiente afirmación:

$$N(S) \cdot S^{D} = 1$$

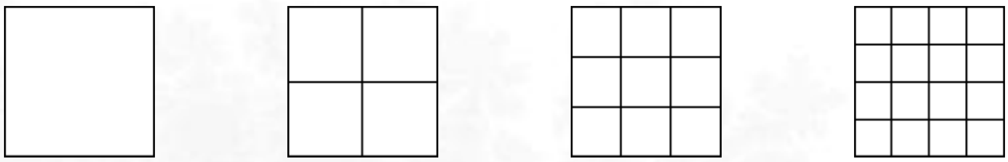
Donde $\mathrm{N(S)}$ es el número de objetos elementales de tamaño S que completan un objeto.

Dicha afirmación se cumple, por ejemplo, en los siguientes casos:

- Línea: $N(S) \cdot S^{1} = 1$

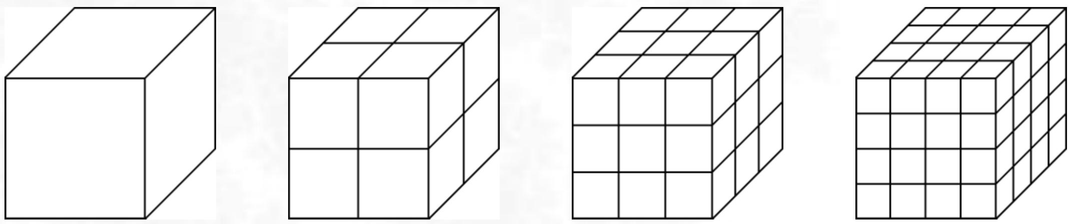
$1 \text{ x } 1^1 = 1$ $2 \text{ x } 0.5^1 = 1$ $3 \text{ x } 0.33^1 = 1$ $4 \text{ x } 0.25^1 = 1$

- Cuadrado: $N(S) \cdot S^{2} = 1$



$1 \text{ x } 1^2 = 1$ $4 \text{ x } 0.5^2 = 1$ $9 \text{ x } 0.33^2 = 1$ $16 \text{ x } 0.25^2 = 1$

- Cubo: $N(S) \cdot S^{3} = 1$



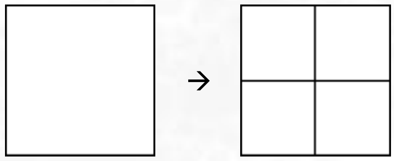
$1 \text{ x } 1^3 = 1$ $8 \text{ x } 0.5^3 = 1$ $27 \text{ x } 0.33^3 = 1$ $64 \text{ x } 0.25^3 = 1$

De este modo, podemos deducir que el exponente D corresponde a la dimensión euclídea del objeto analizado, quedando despejado de la siguiente forma:

$$D = \frac{log(N(S))}{log(1/S)}$$

Dimensión Fractal

El método descrito anteriormente funciona muy bien para figuras regulares. Como hemos visto, si tomamos un cuadrado de lado unidad y dividimos tanto su ancho como su alto por la mitad, obtendremos 4 cuadrados de lado igual a 0.5, con lo que su dimensión euclídea sería:



$$D = \frac{log(4)}{log(1/0,5)} = 2$$

¿Pero, cómo hacemos para dividir un objeto irregular en partes iguales?

Parecer difícil, pero, si nos fijamos bien, lo que estamos haciendo con este método es tan sencillo como contar el número $\mathbf{N}$ de cuadrados de tamaño $\mathbf{S}$ necesarios para cubrir el objeto en su totalidad.

De ahora en adelante llamaremos a estos cuadrados “cajas”.

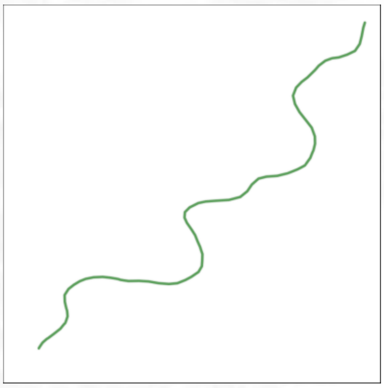
Basándonos en esta idea, la dimensión fractal vendrá dada por el análisis de cómo aumenta el número de cajas necesarias para cubrir el objeto a medida que reducimos el tamaño de estas para ajustarlas a sus irregularidades. Es decir, a medida que analizamos el objeto a menor escala.

Llegado a este punto, ya podemos ver que estamos hablando del cálculo del límite de la relación entre $log(N)$ y $log({}^{1}/_{S})$, cuando el tamaño de caja tiende a cero:

$$BoxD = \lim_{s \to 0} \frac{log\ (N)}{log\ ({}^{1}/_{S})}$$

Algoritmo

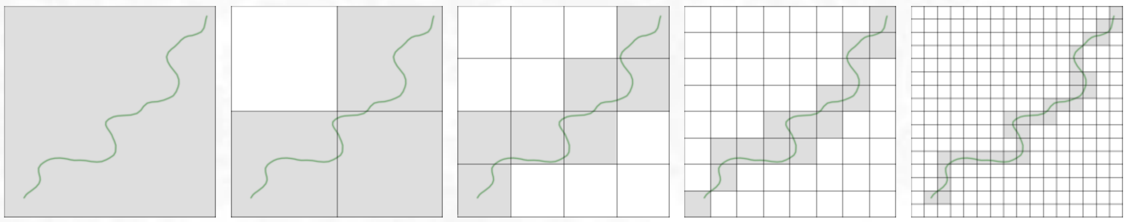
Vamos a usar el **Método de Conteo de Cajas de Minkowski-Bouligand** para calcular la dimensión fractal de, por ejemplo, una línea. Para ello trazaremos una curva cualquiera dentro de un lienzo cuadrado:



Si consideramos el lienzo completo como el primer tamaño de caja, y que este mide 16 unidades, tenemos que con una sola caja de tamaño 16 cubrimos la curva completa: $S = 16, N = 1$.

Ahora, sólo tenemos que reducir sucesivamente el tamaño de caja y contar cuantas recubren la curva en cada momento.

Para este ejemplo vamos a reducir el tamaño de caja a la mitad sucesivamente, hasta llegar al tamaño igual a 1:



16 x 16 | 8 x 8 | 4 x 4 | 2 x 2 | 1 x 1

Una vez finalizado este proceso, para la curva del ejemplo, habremos obtenido el siguiente conteo de cajas; con el que ya podemos calcular los valores de $Log(1/s)$ y $Log(N)$, a los que llamaremos respectivamente $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$:

Conteo de cajas

Tamaño de caja	Número de cajas
S	N
16	1
8	3
4	7
2	15
1	32

Conjunto de datos

Log(1/S)	Log(N)
X	Y
-1.204119983	0
-0.903089987	0.477121255
-0.602059991	0.84509804
-0.301029996	1.176091259
0	1.505149978

Recordemos que queremos averiguar a qué ritmo aumenta el número de cajas necesarias para cubrir la curva, a medida que reducimos el tamaño de estas, así que el siguiente paso será interpretar el conjunto de datos.

Partimos con la ventaja de que al despejar $\mathbf{D}$ ya hemos transformado una relación exponencial en una lineal, gracias a la aparición de los logaritmos. En nuestro caso $\mathbf{X}$ es la variable independiente e $\mathbf{Y}$ la variable dependiente, así que podemos graficar los datos en un diagrama de dispersión y calcular su recta de regresión, cuya pendiente nos proporcionará el valor que estamos buscando.

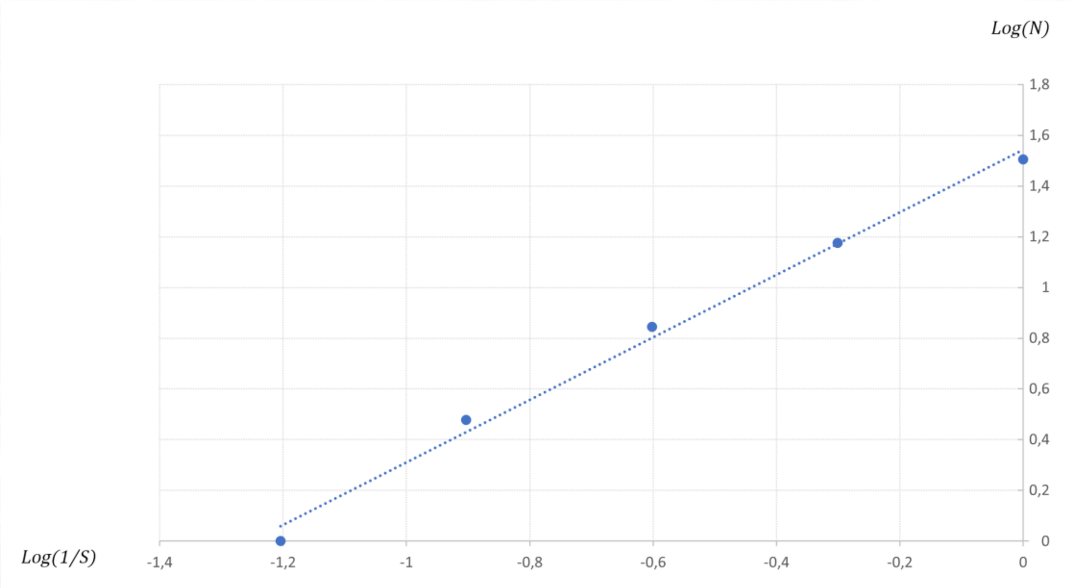


Gráfico obtenido con Excel a partir del conjunto de datos

La recta de regresión, o línea de tendencia, es la línea que mejor se ajusta a la nube de puntos, y para calcular su pendiente podemos usar cualquier método de regresión lineal. En este caso, usaremos el **Método de Mínimos Cuadrados**:

$$m = \frac{Cov(x,y)}{Var(x)}$$

Donde:

La pendiente $\boldsymbol{m}$ es, en nuestro caso, la dimensión fractal.

La covarianza $\boldsymbol{Cov(x,y)}$ mide cómo las dos variables cambian juntas. Una covarianza positiva indica que ambas variables tienden a aumentar o disminuir simultáneamente, mientras que una covarianza negativa indica que cuando una variable aumenta, la otra tiende a disminuir.

$$Cov(x,y) = n\sum(xy) \; - \; \sum x \sum y$$

La varianza $\boldsymbol{Var(x)}$ mide cuánto se desvían los valores de una variable con respecto a su promedio. Una varianza grande indica que los valores están muy dispersos, mientras que una varianza pequeña indica que están concentrados cerca del promedio.

$$Var(x) = n\sum(x^2) \; - \; (\sum x)^2$$

Vamos a calcular los valores que necesitamos para sustituirlos en la fórmula:

$$m = \frac{n\sum(xy) - \sum x\sum y}{n\sum(x^2) - (\sum x)^2}$$

Número de muestras	n	5
Suma de X	$\sum$x	-3.01029996
Suma de Y	$\sum$y	4.00346053
Suma de X^2	$\sum(x^2)$	2.71857175
Suma de X·Y	$\sum$(xy)	-1.29372189

$$\mathrm{m} = \frac{5 \cdot (-1.29372189) - (-3.01029996 \cdot 4.00346053)}{5 \cdot 2.71857175 - (-3.01029996^2)}$$

Y realizando las operaciones tenemos que la dimensión fractal de la curva del ejemplo es:

$$\boldsymbol{m = 1.232192809}$$

Este valor, la dimensión fractal, indica que, al reducir el tamaño de caja a la mitad, el número de cajas necesarias para cubrir la curva aumenta, aproximadamente, en un factor de $\mathbf{2^{1.232192809}}$

Por último, podemos representar la línea de tendencia con la ecuación de la recta:

$$y = mx + b$$

Donde $\boldsymbol{m}$ es la pendiente de la recta y $\boldsymbol{b}$ es el intercepto, o punto por el que la recta cruza el eje $\boldsymbol{y}$.

Como ya tenemos la pendiente, sólo nos queda calcular el intercepto, utilizando los promedios de $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$:

$$b = \overline{y} - m\overline{x}$$

$$b = \frac{\sum y}{n} - m\frac{\sum x}{n}$$

$$b = \frac{4.00346053}{5} - \frac{1.232192809 \cdot (-3.01029996)}{5}$$

$$b = 1.542546099$$

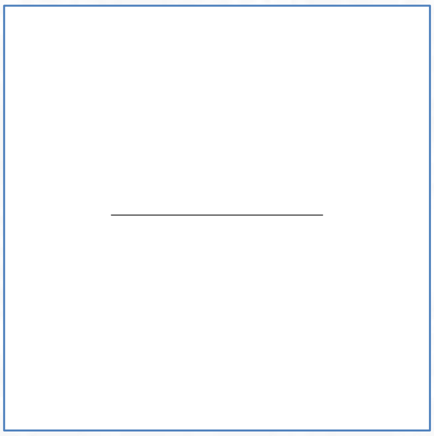
Y la recta de regresión queda definida como:

$$\boldsymbol{y = 1.232192809x + 1.542546099}$$

Conclusiones

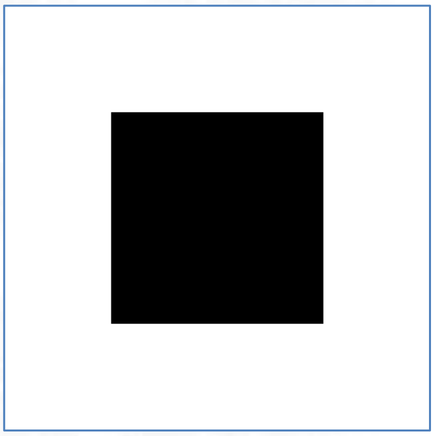
Este método de conteo de cajas se estudió durante las clases de **Geometría Fractal** impartidas por **FractalFun** en el curso 2022-23. El estudio finalizó con la implementación del algoritmo en una sencilla aplicación, en lenguaje Python, con el fin de comprobar su eficacia.

Por ejemplo, se analizaron diferentes figuras regulares de las que ya conocemos de antemano su dimensión euclídea, y se obtuvieron resultados muy cercanos a los esperados, lo cual denota la gran eficacia del método para este tipo de figuras:



Valor esperado: 1

Valor obtenido: 0.9999999999999991



Valor esperado: 2

Valor obtenido: 1.9999999999999982

Más tarde, este algoritmo se incluyó en **FFExplorer** v12.5 para poder comprobar su eficacia con una gran variedad de curvas fractales. Concretamente, se incluyó en el diseñador de fractales lineales, con el que se ha creado el fractal que se muestra al comienzo de este documento.

El trabajo de fin de curso de los alumnos de **FractalFun** se puede ver en este [vídeo]().